1 Divisibilité

Définition. Soient a et b deux entiers naturels ($b \neq 0$), on dit que "b est un **diviseur** de a" lorsqu'il existe un entier naturel c tel que $a = bc$. On dit aussi que "a est un **multiple** de b".

Exemple. Par exemple, 3 divise 15 car $15 = 3 \times 5$.

Remarque. Tout nombre entier non nul a, admet aux moins deux diviseurs, 1 et a (distincts quand $a \neq 1$).

Critères de divisibilité (Rappels)

Un nombre est divisible :

- par 2 : si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8,
- par 3 : si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 5 : si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 9 : si la somme de ses chiffres est divisible par 9,
- par 10 : si son chiffre des unités est 0.

Exemple. 1242 est divisible par 2 (son chiffre des unités est 2), par 3 et par 9 ($1+2+4+2 = 9$).

2 Nombres premiers

Définition. Un entier est **premier** s'il admet exactement **deux** diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Remarque.

- 1 n'est pas premier ;
- Les nombres premiers inférieurs à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Proposition. Si b divise a alors $b \leq a$.

Proposition. Soit $a \in \mathbb{N}$, si aucun nombre entier différent de 1 inférieur ou égal à $\sqrt{a}$ ne divise a, alors a est un nombre premier.

Exemple. Pour $a = 11$, on a $\sqrt{11} \approx 3,3$ et les nombres 2 et 3 ne divisent pas 11, donc 11 est premier.

Proposition. Tout entier naturel a, non premier, supérieur à 2 peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit où chaque facteur est un nombre premier.

Exemple. Soit $a = 6174$. On dispose les calculs de la manière suivante :

Quotients successifs	Diviseurs successifs
6174	2
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

Ainsi, $6174 = 2 \times 3^2 \times 7^2$.

Remarque.
- On appelle cette forme la "**décomposition en produit de facteurs premiers** de a" ;
- Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Application.
- Réduction de fractions :

$$\frac{540}{1134} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 5}{2 \times 3^4 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

- Simplification de radicaux :

$$\sqrt{540} = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 5} = 6\sqrt{15}$$

$$\sqrt{1134} = \sqrt{2 \times 3^4 \times 7} = 9\sqrt{14}$$